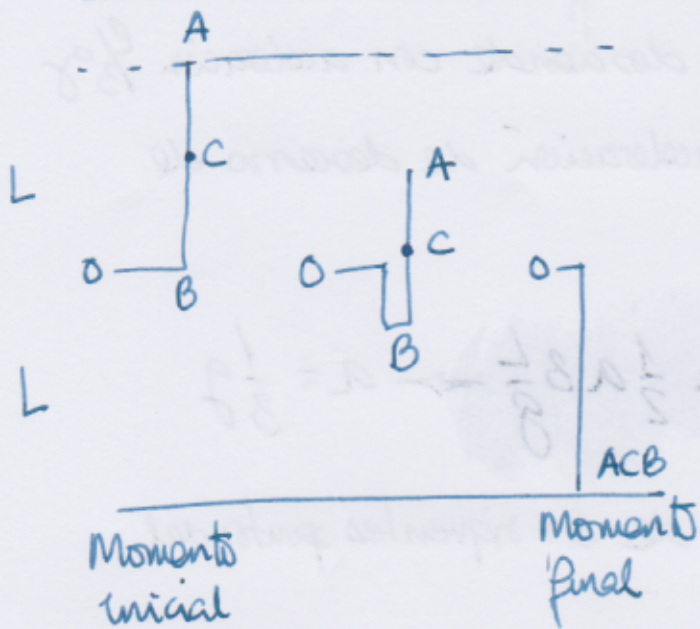


EL CABLE COLGANTE

6. X. 2013

1



Se plantean los siguientes análisis

- A \rightarrow extremo libre del cable
- C \rightarrow centro de gravedad del tramo AB que cae
- B \rightarrow Punto bajo.

La dinámica que se plantea se puede dividir en dos problemas: el del tramo que cae y el del tramo que cuelga.

Análisis en primer lugar el movimiento del tramo AB que cae: es un movimiento de caída libre puesto que sobre el cable únicamente actúa la fuerza de la gravedad. Por tanto su centro de gravedad C dependerá en todo momento con aceleración g .

¿Cuánto tardará C en llegar al suelo?

$$s = \frac{1}{2}at^2 \rightarrow \frac{3}{2}L = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t^2 = \frac{3L}{g}$$

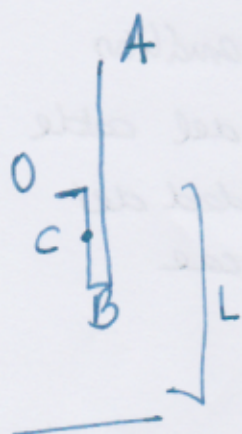
Dado que en el momento que C llega al suelo, también llegan los puntos A y B, se pueden deducir las aceleraciones:

$$\text{Para A: } 2L = \frac{1}{2}at^2 \rightarrow 2L = \frac{1}{2}a \frac{3L}{g} \rightarrow a = \frac{4}{3}g$$

$$\text{Para B: } L = \frac{1}{2}at^2 \rightarrow L = \frac{1}{2}a \frac{3L}{g} \rightarrow a = \frac{2}{3}g$$

Se analiza ahora el tramo OB que cuelga:

2



Sabemos que el punto B desciende con aceleración $\frac{4}{3}g$.
Calculamos igualmente la aceleración de descenso de su centro de gravedad C

$$\frac{L}{2} = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow \frac{L}{2} = \frac{1}{2} a \frac{L}{g} \Rightarrow a = \frac{1}{3}g$$

Conocemos entonces las aceleraciones de los siguientes puntos del cable

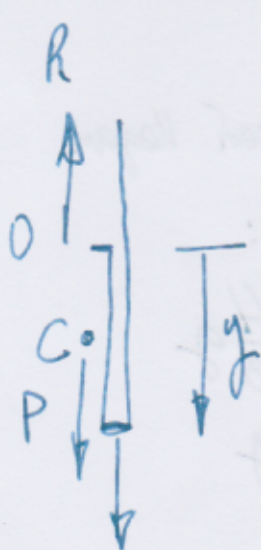
$$A \rightarrow \frac{4}{3}g$$

$$B \rightarrow \frac{2}{3}g$$

$$C \rightarrow \frac{1}{3}g \rightarrow \text{cdg del tramo que cuelga:}$$

Equilibrio de fuerzas del tramo que cuelga OB

El tramo que cuelga OB recibe el cable que cae con la aceleración del punto B, $\frac{2}{3}g$; y simultáneamente su centro de gravedad desciende con aceleración $\frac{1}{3}g$.

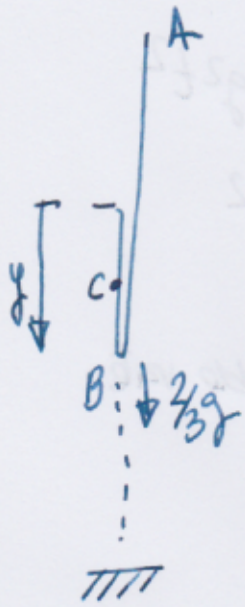


La suma de las fuerzas que actúan sobre el tramo OB que cuelgan debe ser igual a la inercia con la que se desplaza hacia abajo su centro de gravedad C

$$\Sigma F = ma = m \frac{1}{3}g$$

$$\text{Peso} + \text{Empuje del cable que cae} - R = \frac{1}{3}mg$$

Sobre el peso del cable que cuelga:



Si tomamos como sistema de referencia la medida del cable que cuelga - y - en sentido descendente:

$m \rightarrow$ masa del tramo de cable que cuelga
 $y \rightarrow$ longitud que cuelga

$m = \frac{M}{L} y$; Sabemos que la aceleración del punto B es $\frac{2}{3}g$

$s = \frac{1}{2} at^2 \rightarrow y = \frac{1}{2} \frac{2}{3} g t^2 \rightarrow y = \frac{1}{3} g t^2$

Por tanto: $m = \frac{1}{3} \frac{M}{L} g t^2$ ← Masa del tramo que cuelga

Es decir: el peso del tramo que cuelga es: $mg = \frac{1}{3} \frac{M}{L} g^2 t^2$

Sobre el empuje del cable que baja por



En cada instante la cuerda que cae empuja al tramo que cuelga con un valor:

$dE = dm \frac{2}{3} g$

$m = \frac{1}{3} \frac{M}{L} g t^2 \rightarrow dm = \frac{2}{3} \frac{M}{L} g t dt$ } →

$\rightarrow dE = \frac{2}{3} \frac{M}{L} g t \frac{2}{3} g dt = \frac{4}{9} \frac{M}{L} g^2 t dt \rightarrow$

$\rightarrow E = \frac{2}{9} \frac{M}{L} g^2 t^2$ —

Resolviendo el equilibrio de fuerzas:

$$\text{Peso} + \text{Empuje} - R = \frac{1}{3} mg = \frac{1}{3} \frac{1}{3} \frac{M}{L} g^2 t^2 = \frac{1}{9} \frac{M}{L} g^2 t^2$$

$$\frac{1}{3} \frac{M}{L} g^2 t^2 + \frac{2}{9} \frac{M}{L} g^2 t^2 - R = \frac{1}{9} \frac{M}{L} g^2 t^2 \rightarrow R = \frac{4}{9} \frac{M}{L} g^2 t^2$$

La fuerza F que el soporte debe hacer para sostener el cable vale:

$$F = \frac{4}{9} \frac{M}{L} g^2 t^2$$

El momento en el que se rompe el soporte viene determinado cuando se alcanza su valor de diseño de Mg

$$Mg = \frac{4}{9} \frac{M}{L} g^2 t^2 \rightarrow \text{cancelar } M \text{ y } g \rightarrow g = \frac{4}{9} g t^2 \rightarrow t^2 = \frac{9}{4} \frac{L}{g}$$

$$\text{El soporte rompe en } t = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{L}{g}}$$

En ese momento de dicha el cable ha caído:

$$y = \frac{1}{2} \frac{2}{3} g t^2 = \frac{1}{3} g t^2 = \frac{1}{3} g \frac{9}{4} \frac{L}{g} = \frac{3}{4} L$$

El cable ha caído $\frac{3}{4}$ de su longitud.

Vicente López, a 6 de octubre de 2013.