

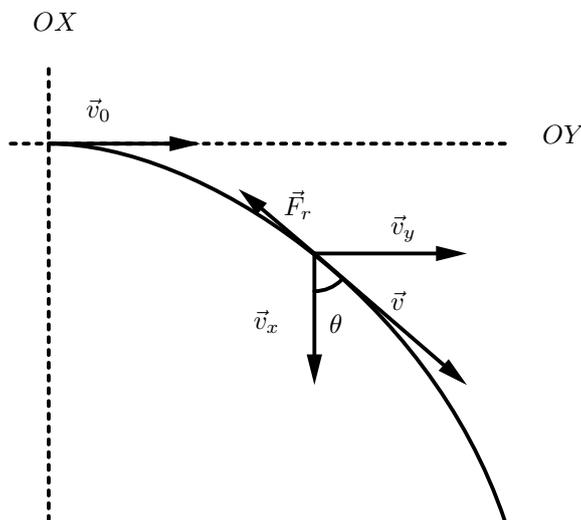
**Acerca de la segunda pregunta:**

Si ahora existe rozamiento con el plano y el coeficiente de rozamiento dinámico es  $\mu = \text{tg } 30^\circ$ , ¿cuál será el valor del ángulo  $\theta$  al cabo de un tiempo muy, muy largo (puedes considerarlo infinito)?

El módulo de la fuerza de rozamiento es constante; en efecto,  $F_r = \mu N = \text{tg } 30^\circ mg \cos 30^\circ = 5m \quad (N)$

y esta fuerza va cambiando de dirección con el tiempo según lo hace la velocidad, pues la fuerza de rozamiento se opone siempre al movimiento. Se puede descomponer en los dos ejes como sigue y estas componentes dependen del tiempo  $t \geq 0$ :

$$\begin{aligned} F_{r,y} &= 5m \text{ sen } \theta(t) & (t \geq 0) \\ F_{r,x} &= 5m \text{ cos } \theta(t) & (t \geq 0) \end{aligned}$$



Por tanto, como en el eje  $OY$  sólo actúa el rozamiento, la expresión de la componente  $v_y$  de la velocidad es:

$$v_y = v_0 - \int_0^t 5 \text{ sen } \theta(s) ds \quad \theta(0) = 90^\circ.$$

En el eje  $OX$  actúan el rozamiento y la componente del peso paralela al plano en dirección “cuesta abajo” ( $mg \text{ sen } 30^\circ$ ), luego la expresión de la componente  $v_x$  de la velocidad es:

$$v_x = \int_0^t 5[1 - \text{ cos } \theta(s)] ds, \quad \theta(0) = 90^\circ. \quad \text{Así pues, la expresión del ángulo } \theta \text{ es:}$$

$$\theta = \text{ arc tg } \left( \frac{v_y}{v_x} \right) = \text{ arc tg } \left( \frac{v_0 - \int_0^t 5 \text{ sen } \theta(s) ds}{\int_0^t 5[1 - \text{ cos } \theta(s)] ds} \right)$$

Si existe un valor del tiempo, digamos  $t_0 > 0$ , tal que  $v_y = 0$ , entonces a partir de ese instante el valor del ángulo  $\theta$  es  $0^\circ$  y el objeto se mueve pendiente abajo con movimiento uniforme, ya que la resultante de las fuerzas es nula; además

$$v_0 = \int_0^{t_0} 5 \text{ sen } \theta(s) ds$$

y si suponemos que el ángulo  $\theta(s)$  ha disminuido de forma continua desde su valor inicial  $\theta(0) = 90^\circ$  hasta su valor final  $\theta(t_0) = 0^\circ$ , entonces, por el teorema de la media, existe un valor  $0 < s_1 < t_0$ , tal que  $v_0 = 5t_0 \text{ sen } \theta(s_1)$  y así, el valor de la componente  $v_x$  en dicho instante es:

$$v_x(t_0) = \int_0^{t_0} 5[1 - \text{ cos } \theta(s)] ds = 5t_0[1 - \text{ cos } \theta(s_2)] \quad \text{donde } 0 < s_2 < t_0 \text{ por lo que } v_x(t_0) = \frac{1 - \text{ cos } \theta(s_2)}{\text{ sen } \theta(s_1)} v_0$$

Si  $t_0$  verifica que  $s_1, s_2$  son tales que  $\theta(s_1), \theta(s_2)$  son próximos a  $0^\circ$ , entonces

$v_x(t_0) = \frac{1 - \text{ cos } \theta(s_2)}{\text{ sen } \theta(s_1)} v_0 \simeq \frac{\theta^2(s_2)}{2\theta(s_1)} v_0 \simeq 0$  y el objeto iría pendiente abajo con movimiento uniforme pero muy lentamente.

Si  $t_0$  verifica que  $s_1, s_2$  son tales que  $\theta(s_1), \theta(s_2)$  son próximos a  $90^\circ$ , entonces  $v_x(t_0) = \frac{1 - \text{ cos } \theta(s_2)}{\text{ sen } \theta(s_1)} v_0 \simeq v_0$  y el objeto iría pendiente abajo con movimiento uniforme y casi con la velocidad  $v_0$  con que fue lanzado.