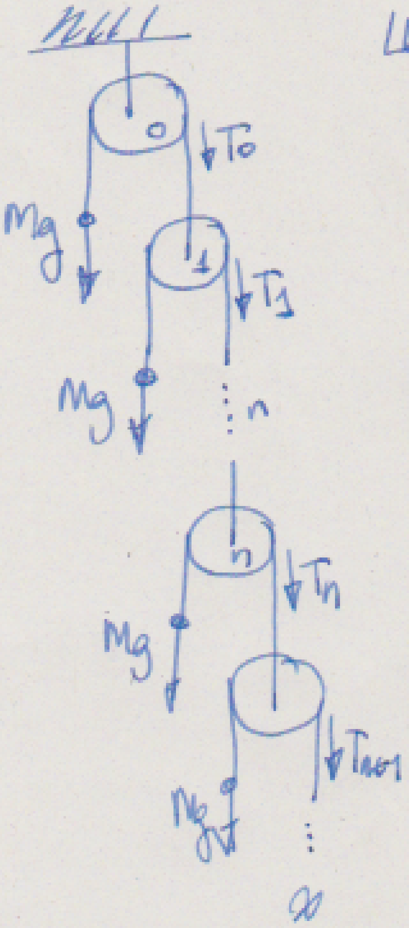
Planteamiento del problema:



Llamaremos

a_n ← aceleración del koalindre "n-ésimo" de la polea "n-ésima"

T_n ← tensión del cable que rodea la polea "n-ésima"

Para cualquier polea se cumple que

$$Mg - T_n = Ma_n$$

entonces:

$$a_n = g - \frac{T_n}{M}$$

→ Dado que las poleas tienen masa nula

También se cumple que:

$$T_0 = 2T_1 \Rightarrow T_1 = \frac{1}{2}T_0$$

$$T_1 = 2T_2 \Rightarrow T_2 = \frac{1}{2}T_1 = \frac{1}{4}T_0$$

en general, en la polea "n-ésima" se cumple que $T_n = \frac{1}{2^n}T_0$

Por tanto, la aceleración del koalindre de la polea "n-ésima":

$$a_n = g - \frac{1}{2^n}\frac{T_0}{M}$$

siendo T_0 la tensión de la polea fija.

En función del movimiento del koalindre "n-ésimo" se producirá la siguiente variación de energía en la polea "n-ésima" (en un tiempo t)

$$\Delta E_n = \Delta E_{p_n} + \Delta E_{c_n}$$

$$\Delta E_{p_n} = Mg\Delta h = \frac{1}{2}Mg a_n t^2$$

$$\Delta E_{c_n} = \frac{1}{2}M\Delta v^2 = \frac{1}{2}M a_n^2 t^2$$

→ Variaciones de energía cinética y potencial en cada polea.

Sabiendo que:

$$a_n = g - \frac{1}{2^n}\frac{T_0}{M} \rightarrow a_n^2 = g^2 + \frac{1}{2^n}\frac{T_0^2}{M^2} - \frac{1}{2^{n-1}} g \frac{T_0}{M}$$

Entonces:

$$\Delta E_{pn} = Mg\Delta h = \frac{1}{2} Mg a_n t^2 = \left[\frac{1}{2} Mg^2 - \frac{1}{2^{n+1}} g T_0\right] t^2$$

$$\Delta E_{cn} = \frac{1}{2} M a_n^2 t^2 = \left[\frac{1}{2} Mg^2 + \frac{1}{2^{n+1}}\frac{T_0^2}{M} - \frac{1}{2^n} g T_0\right] t^2$$

Por lo que, en la polea "n-enima" resulta el siguiente balance de energía

$$\Delta E_n = \Delta E_{cn} - \Delta E_{pn} = \left[\cancel{\frac{1}{2} Mg^2} + \frac{1}{2^{2n+1}}\frac{T_0^2}{M} - \frac{1}{2^n} g T_0\right] t^2 -$$

$$- \left[\cancel{\frac{1}{2} Mg^2} - \frac{1}{2^{n+1}} g T_0\right] t^2$$

$$\Delta E_n = \left[\frac{1}{2^{2n+1}}\frac{T_0^2}{M} + \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n}\right) g T_0\right] t^2 =$$

$$= \left[\frac{1}{2^{2n+1}}\frac{T_0^2}{M} - \frac{1}{2^{n+1}} g T_0\right] t^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4^n}\frac{T_0^2}{M} - \frac{1}{2^n} g T_0\right] t^2$$

La variación de la energía en todo el sistema de poleas es la suma de la variación de la energía en cada polea

$$\Delta E = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta E_n = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\frac{T_0^2}{M} - 2gT_0\right] t^2 = \left[\frac{2}{3}\frac{T_0^2}{M} - gT_0\right] t^2$$

La energía total del sistema debe mantenerse constante por lo que la variación debe ser nula

$$\Delta E = 0 \rightarrow \left(\frac{2}{3}\frac{T_0^2}{M} - gT_0\right) t^2 = 0 \rightarrow \frac{2}{3}\frac{T_0^2}{M} - gT_0 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow T_0\left(\frac{2}{3}\frac{T_0}{M} - g\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} T_0 = 0 \\ \frac{2}{3}\frac{T_0}{M} - g = 0 \rightarrow T_0 = \frac{3}{2} Mg \end{cases}$$

La solución $T_0 = 0$ supone la caída libre de todos los cilindres. Claramente conserva la energía del sistema pero no tiene sentido pues implicaría que todos los cables de unión dejan de actuar

Tomamos pues, la solución $T_0 = \frac{3}{2} Mg$ como válida. Dado que:

$$\left.\begin{aligned} Mg - T_n &= M a_n \\ T_0 &= \frac{3}{2} Mg \end{aligned}\right\} \Rightarrow Mg - \frac{3}{2} Mg = M a_0$$

Entonces: $\boxed{a_0 = -\frac{1}{2} g}$ El primer cilindre SUBE con aceleración mitad de la gravedad

Vicente López, el 7 de junio de 2014