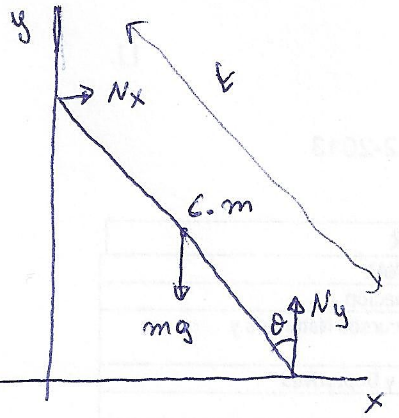

Ecuaciones del movimiento del c.m.

$$m\ddot{x} = N_x$$

$$m\ddot{y} = N_y - mg$$

Este es un sistema con un solo grado de libertad

Relación entre variables θ, x, y

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta \\ y = \frac{L}{2}\cos\theta \end{array}\right\} (x,y) \text{ es la posición del c.m.}$$

$\dot{x} = \frac{L}{2}\cos\theta\cdot\dot{\theta}$; $\ddot{x} = \frac{L}{2}(-\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta}\cdot\cos\theta)$

$\dot{y} = -\frac{L}{2}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta$; $\ddot{y} = -\frac{L}{2}(\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta)$

Sabiendo que $m\ddot{x} = N_x \Rightarrow N_x = m\frac{L}{2}(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta)$

Existe la posibilidad de que $N_x = 0 \Rightarrow \dot{x} = cte$ cuando $\boxed{\ddot{\theta}\cos\theta = \dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta}$ (1)

Para hallar el angulo θ_1 que cumpla la condición necesitamos conocer $\ddot{\theta}(\theta)$ y $\dot{\theta}(\theta)$

Utilizaremos la ecuación de Lagrange para este caso

$$\mathcal{L} = T - V \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\theta} = 0$$

T = energia cinetica de la escalera (rotación + traslación)

$$T = \frac{1}{2}I_c\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) = \frac{1}{6}mL^2\dot{\theta}^2$$

I_c = momento de inercia $= \frac{1}{12}mL^2$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2\cdot\dot{\theta}^2$$

V = energia potencial de la escalera $= mg\left(\frac{L}{2} - y\right) = \frac{mgL}{2}(1-\cos\theta)$

$\mathcal{L}$ = lagrangiano $= \frac{1}{6}mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{mgL}{2}(1-\cos\theta)$

$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \frac{1}{3}mL^2\dot{\theta}$; $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -\frac{mgL}{2}\operatorname{sen}\theta$; $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta} + \frac{mgL}{2}\operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{3}{2}\frac{g\operatorname{sen}\theta}{L}$

$$\boxed{\ddot{\theta}(\theta) = \frac{3}{2}g\frac{\operatorname{sen}\theta}{L}}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{2}\, g\, \frac{\operatorname{sen}\theta}{L}$$

$\dot{\theta}\,\dfrac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \dfrac{3}{2}\, g\, \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{L}$ ⇒ resolviendo la ecuación diferencial separando las variables $\dot{\theta}$ y θ

$$\int \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \int \frac{3}{2}\frac{g}{L} \operatorname{sen}\theta \;\Rightarrow\; \frac{\dot{\theta}^2}{2} = -\frac{3g}{2L}\cos\theta + K$$

Sabemos que cuando $\theta = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = 0$, la escalera no se mueve

$$0 = -\frac{3g}{2L} + K \;\Rightarrow\; K = \frac{3g}{2L}$$

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L}(1-\cos\theta)}$$

Volvemos a la ecuación (1) ⇒ $\dfrac{\cancel{3}}{2}\, \dfrac{\cancel{g}\,\cancel{\operatorname{sen}\theta}}{\cancel{L}} \cdot \cos\theta = \dfrac{\cancel{3g}}{\cancel{L}}(1-\cos\theta)\,\cancel{\operatorname{sen}\theta}$

$\cos\theta = 2(1-\cos\theta) \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{2}{3}}$

Cuando $\theta_1 = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow N_x = 0 \Rightarrow \dot{x} = cte$

Recordando que $\dot{x} = \dfrac{L}{2}\,\dot{\theta}\cos\theta \Rightarrow \dot{x}_1 = \dfrac{L}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{3g}{L}\left(1-\cancel{\cos\theta}\ \tfrac{2}{3}\right)}\cdot\dfrac{2}{3}$ para $\cos\theta_1 = \dfrac{2}{3}$

$$\boxed{\dot{x}_1 = \frac{1}{3}\sqrt{L\cdot g}}$$

Esta es la velocidad horizontal "terminal" para el centro de masas del palo.

GREGORIO ANGEL RENTERO CONDE