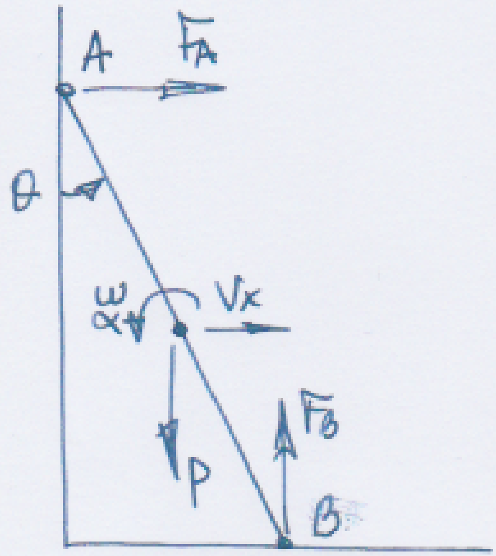
EL PALO DESLIZANTE — 11. X. 2014

Planteamiento del problema:



Siendo:

P — Peso de la barra
F_A — Reacción horizontal en la pared vertical
F_B — Reacción vertical en la pared horizontal
ω — Velocidad angular de la barra
α — Aceleración angular de la barra
V_x — Velocidad horizontal del centro de masas de la barra

La dinámica del sistema se resuelve del siguiente modo:

$\Sigma F = Ma$ — siendo a la aceleración del centro de masas de la barra y M su masa

$\Sigma M = I\alpha$ — siendo I la inercia de la barra y α su aceleración angular

entonces:

$$F_A = ma_x$$

$$P - F_B = ma_y$$

$$-F_A \frac{L}{2} \cos\theta + F_B \frac{L}{2} \operatorname{sen}\theta = I\alpha$$, siendo L la longitud de la barra

Consideremos además, el recorrido del centro de masas en su descenso:

$$x = \frac{L}{2} \operatorname{sen}\theta \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} L \cos\theta \frac{d\theta}{dt} = V_x$$

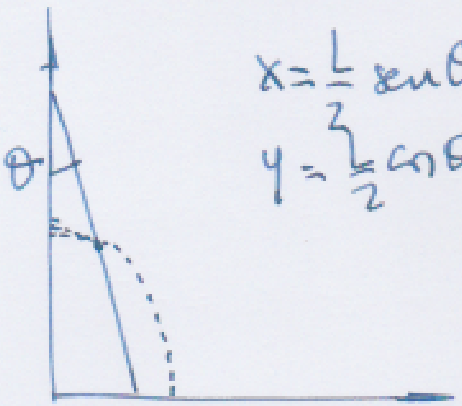
$$y = \frac{L}{2} \cos\theta \rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2} L \operatorname{sen}\theta \frac{d\theta}{dt} = V_y$$

La aceleración del centro de masas, según las ecuaciones anteriores, toma valor

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{1}{2}L\left(-\operatorname{sen}\theta \frac{d\theta}{dt} + \cos\theta \frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{1}{2}L\left(\cos\theta \frac{d\theta}{dt} + \operatorname{sen}\theta \frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$$

De acuerdo a lo anterior, el centro de masas, en su descenso al deslizar la barra por la pared, recorre la siguiente trayectoria:



$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta \\ y = \frac{L}{2}\cos\theta \end{array}\right\} \longrightarrow$$ Arco de circunferencia, siendo los valores de θ entre $(0, \pi/2)$

Para conocer el valor de la velocidad del centro de masas, se aplica el principio de conservación de la energía mecánica:

$$E_c + E_p = cte$$

En el instante inicial:

$$E_{c_0} = 0$$

$$E_{p_0} = \frac{1}{2}mgL$$

En un instante cualquiera del descenso:

$$E_c = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$E_p = Mgy = \frac{1}{2}MgL\cos\theta$$

Por todo lo anterior:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mgL\cos\theta = \frac{1}{2}mgL \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow mv^2 + I\omega^2 + mgL(\cos\theta - 1) = 0 \\ v^2 = v_x^2 + v_y^2 \\ v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}L\cos\theta\,\omega \\ v_y = \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}L\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot\omega \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}ML\left(\cos^2\theta\,\omega^2 + \mathrm{sen}^2\theta\,\omega^2\right) + I\omega^2 + mgL(\cos\theta - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \frac{1}{4}mL\omega^2 + I\omega^2 + mLg(\cos\theta - 1) = 0 \\ I = \frac{1}{12}ML^2 \leftarrow \text{Momento de inercia de una barra girando en el centro de masas} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}mL^2 + \frac{1}{12}mL^2\right)\omega^2 + mgL(\cos\theta - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \frac{1}{3}ML^2\omega^2 + MgL(\cos\theta - 1) = 0 \Rightarrow \omega^2 = 3g/L\,(1 - \cos\theta) \\ 1 - \cos\theta = 2\,\mathrm{sen}^2\,\theta/2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2 = 3\,g/L \cdot 2\,\mathrm{sen}^2\,\theta/2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{6g}{L}}\,\mathrm{sen}\,\theta/2$$

Conocida la velocidad angular en todo momento del descenso se puede calcular la velocidad del centro de masas:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}L\cos\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}L\cos\theta\sqrt{\frac{6g}{L}}\,\mathrm{sen}\,\theta/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_x = \sqrt{3/2\,gL}\,\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta/2$$

De acuerdo a la ecuación anterior, en el instante correspondiente a $\theta = \pi/2$, cuando la barra llegue al suelo, $V_x = 0$.

Sin embargo, tras releer el enunciado del desafío, en el que se indice que se indica que la velocidad final del palo será constante, se considera con más detalle lo anterior:

Sobre la velocidad horizontal del palo se puede decir:

$$V_x = \sqrt{\tfrac{3}{2} g L}\, \cos\theta \,\operatorname{sen}\tfrac{\theta}{2}$$

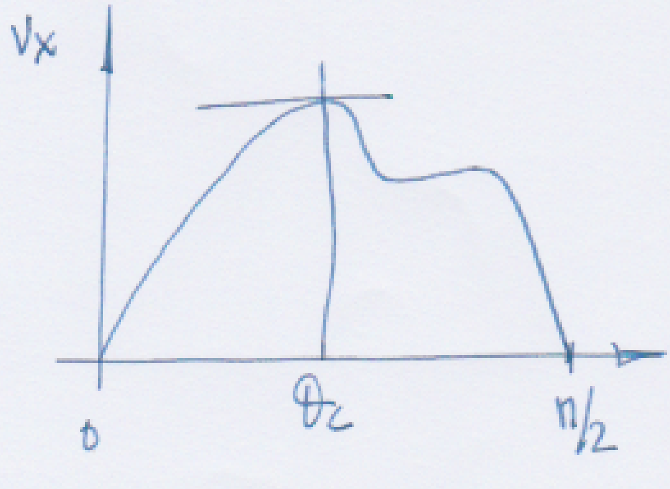
(a) es estrictamente positiva en el intervalo abierto $(0, \pi/2)$

$$V_x > 0 \ : \ \theta \in (0, \pi/2)$$

(b) toma valores nulos en los extremos del intervalo $[0, \pi/2]$

$$\theta = 0 \rightarrow V_x = 0$$
$$\theta = \pi/2 \rightarrow V_x = 0$$

Por tanto, en el intervalo $(0, \pi/2)$, V_x presentará AL MENOS un máximo. A partir de ahora, se considerará que el menor de esos máximos se produce en el instante correspondiente a θ_c



Es decir, que alrededor de ese máximo en θ_c, se cumple que V_x pasa de ser <u>creciente</u> a <u>decreciente</u>

Si V_x crece, significa que la reacción en el punto A (F_A) es mayor que cero, por lo que la aceleración será positiva

$$F_A = m a_x.$$

Sin embargo, si V_x decrece, significa que la aceleración en A será negativa, por una reacción en A (F_A) también negativa.

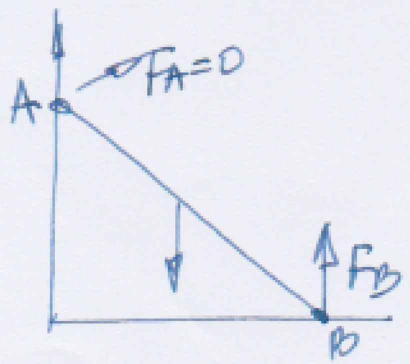
$$V_x \text{ decrece} \Rightarrow a_x < 0 \Rightarrow F_A < 0.$$

En este último caso, sería necesario que el extremo A de la barra recorra la pared horizontal encarrilado en unas guías que lo mantengan en contacto con la pared y que soporten los esfuerzos negativos que se analizan

Esta situación no es posible en el sistema que se analiza puesto que el punto A desciende apoyado en la pared vertical y sólo son posibles reacciones en A positivas. $F_A > 0$.

La ecuación obtenida para V_x sólo es válida para valores de θ comprendidos entre 0 y θ_c.

~~Tras~~ Una vez se alcance el primero de los máximos, $\theta = \theta_c$, la dinámica del sistema que se analiza es diferente



$$m a_x = 0$$

$$m a_y = P - F_B$$

$$I\alpha = F_B \cdot \frac{L}{2} \sin\theta$$

Esto quiere decir, que una vez que se alcance el valor $\theta = \theta_c$ no actuará ninguna fuerza horizontal sobre la barra y se mantendrá con velocidad constante, máxima.

El descenso de la barra continuará hasta que su velocidad vertical se anule al alcanzar el nivel horizontal.

La velocidad de la barra requerida en este desafío es la velocidad horizontal correspondiente al máximo.

$$V_x = \sqrt{\tfrac{3}{2} g L} \cos\theta \, \operatorname{sen} \theta/2$$

Calculemos su máximo:

$f(\theta) = \cos\theta \operatorname{sen}\theta/2 \Rightarrow f'(\theta) = -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta/2 + \tfrac{1}{2}\cos\theta \cos\theta/2$

El máximo tendrá lugar, dado que $V_x > 0 \ \forall \theta \in (0, \theta/2)$ en $f'(\theta) = 0$

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} f'(\theta) = 0 \Rightarrow \tfrac{1}{2}\cos\theta\cos\theta/2 - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta/2 = 0 \\ \operatorname{sen}\theta = 2 \operatorname{sen}\theta/2 \cos\theta/2 \\ \cos\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta/2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \tfrac{1}{2}(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta/2)\cos\theta/2 - 2\operatorname{sen}\theta/2 \cos\theta/2 \operatorname{sen}\theta/2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \tfrac{1}{2}\cos\theta/2 - \operatorname{sen}^2\theta/2 \cos\theta/2 - 2\operatorname{sen}^2\theta/2 \cos\theta/2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \tfrac{1}{2}\cos\theta/2 - 3\operatorname{sen}^2\theta/2 \cos\theta/2 = 0 \Rightarrow \cos\theta/2 - 6\operatorname{sen}^2\theta/2\cos\theta/2 = 0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow (1-6\,\text{sen}^2\theta/2)\cos\theta/2 = 0 \\ \forall\theta\in(0,\pi/2):\ \cos\theta/2>0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1-6\,\text{sen}^2\theta/2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{sen}^2\frac{\theta_c}{2} = 1/6}$$

En $\theta=\theta_c$ se cumple que $\text{sen}^2\theta/2 = 1/6$, entonces

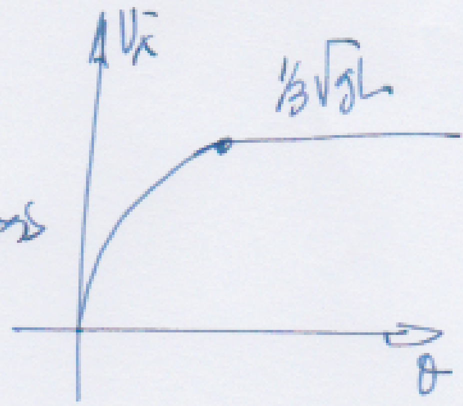
$$\cos\theta = 1-2\,\text{sen}^2\theta/2 = 1-2/6 = 1-1/3 = 2/3 \Rightarrow \boxed{\cos\theta_c = 2/3}$$

Por tanto la velocidad final que se pide vale:

$$V_x = \sqrt{\frac{3}{2}gL}\cos\theta_c\,\text{sen}\,\theta_c/2 = \sqrt{\frac{3}{2}gL}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{1/6} = \sqrt{\frac{3\cdot4}{2\cdot9\cdot6}gL} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{gL} \Rightarrow \boxed{V_x = \frac{1}{3}\sqrt{gL}}$$

La velocidad horizontal toma los siguientes valores



Vicente López, el 11 de octubre de 2014