CABLE COLGANTE

Primero de forma cualitativa: El soporte no sólo está soportando el peso del cable sino que además está frenando su caída. Cada tramo de cable que baja a cierta velocidad acaba en un cierto momento quieto colgando del soporte. Este "frenazo" genera una fuerza adicional a la que se produciría si el cable simplemente colgase en reposo.

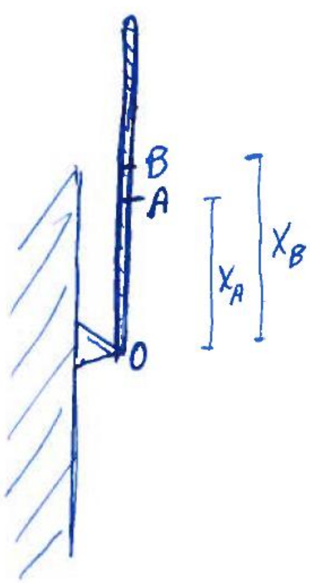
Cuantitativamente: ¿Cuánto vale la fuerza que genera un pequeño tramo de cable de masa "m" al frenar desde una velocidad "V" hasta cero en un cierto tiempo? Justo antes de frenar tenemos un momento lineal, $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{V}$ que pasa a ser cero en un tiempo Δt. La expresión de la fuerza es la siguiente:

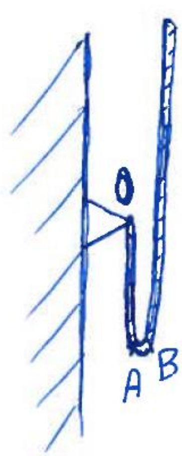
$$\boldsymbol{F}' = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{final}} - \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{inicial}})}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{\boldsymbol{mV}}{\Delta \boldsymbol{t}} \qquad (\mathbf{1})$$

(Velocidad final es cero y mantengo el valor en positivo pues el signo negativo sólo indica que la dirección de la fuerza es de sentido contrario a la variación de velocidad).

Esta **F´** es el tirón que ejerce un pequeño trozo de cable de masa m cuando se frena en un tiempo $\Delta \boldsymbol{t}$

La tarea de hallar la fuerza en el soporte en función de la distancia X que ha recorrido el cable se reduce a calcular el peso del cable que cuelga en reposo en ese instante más el tirón F´ del trozo m que bajaba a velocidad V y frena en ese momento.





Consideremos el tramo de cable AB del dibujo. ¿A qué velocidad va el punto **A** justo antes de frenar? En su punto más bajo ha recorrido una distancia $2X_A$ y voy a suponer que cae en caída libre partiendo del reposo:

$$V_A = gt \qquad y \quad 2X_A = \frac{1}{2}gt^2$$

Despejando t en ambas llegamos a:

$$\boldsymbol{V_A = \sqrt{4gX_A}} \qquad\qquad (\mathbf{2})$$

El tramo AB tiene una masa m que vale $\boldsymbol{M\frac{(X_B-X_A)}{L}}$ donde M y L son la masa y longitud totales del cable.

El tramo de cable OA que cuelga en reposo del soporte tiene una masa $\boldsymbol{M\frac{X_A}{L}}$

Con todo esto ya podemos esbozar una expresión de la fuerza F en el soporte:

$$\boldsymbol{F} = Peso_{OA} + F' = M\frac{X_A}{L}g + \frac{mV}{\Delta t} = \boldsymbol{M\frac{X_A}{L}g + M\frac{(X_B - X_A)}{L}\frac{V_A}{\Delta t}} \qquad (\mathbf{3})$$

El problema es ese Δt. ¿En cuánto tiempo frena un pequeño tramo de cable? Depende de lo largo que elijamos ese tramo. El tramo AB tiene una longitud $(\boldsymbol{X_B - X_A})$ y una masa $\boldsymbol{M\frac{(X_B-X_A)}{L}}$**.** Voy a suponer que la distancia AB es suficientemente pequeña para considerar una velocidad constante, es decir que el punto A y el punto B casi van a la misma velocidad V_A:

$$V_A = \frac{(X_B - X_A)}{\Delta t}$$

Esto no es estrictamente cierto pero espero que como aproximación me valga para llegar a un resultado aceptable. De ahí obtenemos $\Delta\boldsymbol{t} = \frac{(X_B-X_A)}{\boldsymbol{V_A}}$

Sustituyendo en (3) nos queda:

$$\boldsymbol{F = M\frac{X_A}{L}g + M\frac{(X_B - X_A)}{L}\frac{V_A}{(X_B - X_A)/V_A}}$$

Usando la expresión (2) para sustituir V_A llegamos a:

$$\boxed{\boldsymbol{F = \frac{5MgX_A}{L}}}$$

Si el soporte estaba diseñado para aguantar Mg, se romperá cuando la expresión anterior valga Mg, lo que equivale a decir que $\frac{5X_A}{L}$ vale 1, es decir: $X_A = \frac{L}{5}$ y el cable se rompe cuando cuelga la quinta parte de su longitud total.

El soporte se debe diseñar para aguantar toda la longitud, hasta X=L (matemáticamente, se entiende, pues en la realidad habría que darle cierto margen). Haciendo X=L obtenemos que el soporte debería aguantar 5Mg, es decir, 5 veces el peso del cable en reposo.