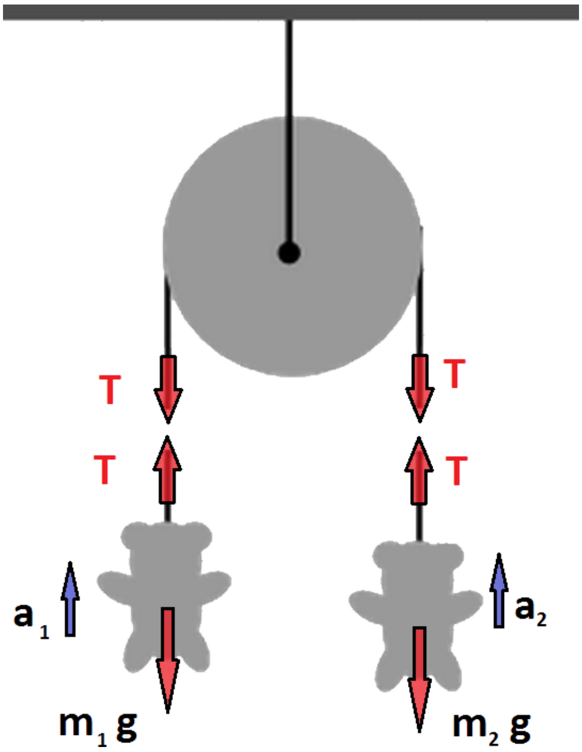
CASO 1: DOS MASAS (UNA POLEA)

Antes de estudiar el caso de infinitos koalindres colgando de infinitas poleas, planteamos el caso de dos koalindres colgando de una sola polea.



Dado que no hay rozamiento, la tensión en cada cable es constante, luego los dos koalindres están sometidos a una fuerza T idéntica hacia arriba. Planteando la segunda Ley de Newton a cada koalindre:

2ª Ley de Newton

$$1 \quad a_1 = \frac{T - m_1 g}{m_1}$$

$$2 \quad a_2 = \frac{T - m_2 g}{m_2}$$

Igualdad de aceleraciones

Como el cable es inextensible, la aceleración de un koalindre será de la misma magnitud y sentido contrario que la del otro, es decir, lo que uno acelere hacia arriba lo hará el otro hacia abajo.

$$3 \quad a_1 = -a_2$$

Resolución del sistema

Tenemos por 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Despejamos a_1 del sistema de ecuaciones:

$$a_1 = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 m_2}$$

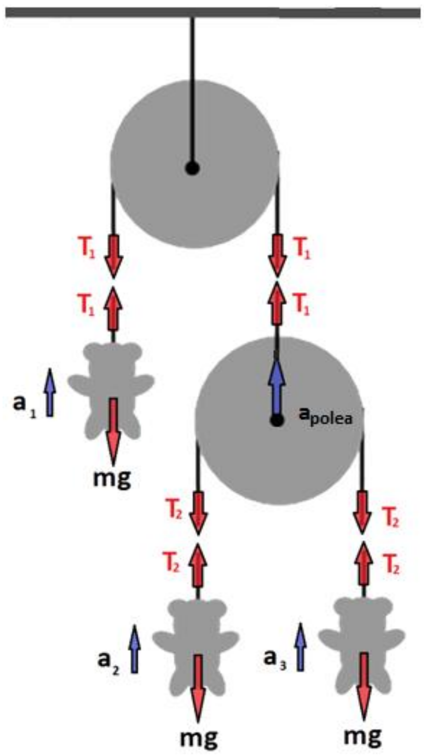
Considerando que todos los koalindres son iguales, en este caso concreto:

$$a_1 = 0g$$

Lo cual es lógico, porque ambos pesan lo mismo y están en equilibrio.

CASO 2: TRES MASAS (DOS POLEAS)

Planteamos ahora el mismo problema con tres koalindres colgando de dos poleas. Aplicaremos el mismo procedimiento de antes, pero para simplificar tendremos en cuenta desde el principio que la masa de todos los kolindres es la misma:



2ª Ley de Newton

$$\text{①} \quad a_1 = \frac{T_1 - mg}{m}$$

$$\text{②} \quad a_2 = \frac{T_2 - mg}{m}$$

$$\text{③} \quad a_3 = \frac{T_2 - mg}{m}$$

Igualdad de aceleraciones

A la hora de igualar aceleraciones en este caso hay que tener especial cuidado. No sólo debemos considerar que cada koalindre se ve sometido a una aceleración, sino que además la segunda polea también se verá acelerada, así que añadimos la incógnita $a_{polea\ 2}$. La relación entre a_1 y $a_{polea\ 2}$ es idéntica a la que había entre los dos koalindres del caso anterior.

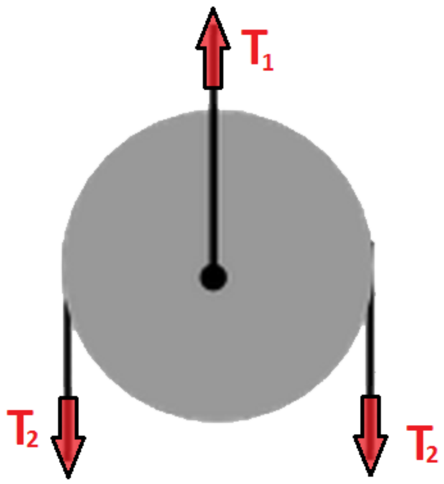
$$\text{④} \quad a_1 = -a_{polea\ 2}$$

Para ver la relación entre a_2, a_3 y $a_{polea\ 2}$ debemos tener en cuenta que las tres ecuaciones que hemos planteado con la 2ª Ley de Newton están referidas a un sistema inercial, es decir, las aceleraciones a_1, a_2 y a_3 (así como $a_{polea\ 2}$) son **aceleraciones absolutas.** La relación que establece el cable entre el koalindre 2 y 3 sin embargo, es entre **aceleraciones relativas** dentro del sistema que forman los koalindres 2 y 3 con la polea 2. Para entendernos, lo que acelera hacia arriba el koalindre 2 (signo positivo) es lo mismo que acelera hacia abajo (signo negativo) el koalindre 3, si a ambos le restamos lo que ya está acelerando la polea y el cable de su sistema de por sí.

$$\text{⑤} \quad a_2 - a_{polea\ 2} = -(a_3 - a_{polea\ 2})$$

Relación entre tensiones

Hasta ahora tenemos 5 ecuaciones y 6 incógnitas, así que necesitamos una ecuación adicional. Esta ecuación viene por la relación entre T_1 y T_2. Como puede verse en la figura:



$$⑥ \quad T_1 = 2T_2$$

Si, como me pasó a mí, te asaltan dudas de que la anterior ecuación pueda ser deducida tan alegremente, hay una pequeña explicación dentro de un recuadro al final de este apartado.

Solución del sistema

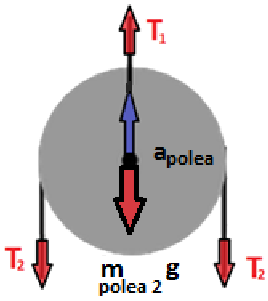
Tenemos por 6 ecuaciones con 6 incógnitas. Despejamos a_1 del sistema de ecuaciones:

$$a_1 = \frac{1}{3}g$$

Luego el primer koliandre sube con un tercio de la aceleración de la gravedad.

Explicación alternativa de la ecuación ⑥: 2ª Ley de Newton para la polea nº 2

Para calcular la relación entre T_1 y T_2, lo más obvio es plantear la 2ª Ley de Newton sólo para la polea en sí, cortando de la siguiente forma:



Ya sabemos que según el enunciado del problema las poleas no tienen masa. ¿Significa esto que no podemos aplicar esta ecuación? Según entiendo, asignándole una masa m_{polea} no hacemos nada incorrecto, sino que resolvemos el problema para un caso más general (es decir, que seguramente haremos trabajo de más, pero bienvenido sea si eso nos hace estar más seguros de hacerlo bien).

$$⑥* \quad a_{polea\ 2} = \frac{T_1 - 2T_2 - m_{polea}g}{m_{polea}}$$

Si resolvemos el sistema utilizando ⑥* en lugar de ⑥ obtenemos:

$$a_1 = g\left(\frac{m + m_{polea}}{3m + m_{polea}}\right)$$

Como se ve, podemos darle valor 0 a la masa de la polea sin caer en ninguna indeterminación ni dividir por cero ni hacer nada "prohibido", y llegamos al mismo resultado que antes.

$$a_1 = \frac{1}{3}g$$

Además, si hemos resuelto el sistema, también veremos que:

$$T_1 = \frac{4 \cdot g \cdot m^2 + g \cdot m \cdot m_{polea}}{3m + m_{polea}} \quad si\ m_{polea} \to 0 \ \ T_1 = \frac{4}{3}gm$$

$$T_2 = \frac{2 \cdot g \cdot m^2}{3m + m_{polea}} \quad si\ m_{polea} \to 0 \quad T_2 = \frac{2}{3}gm$$

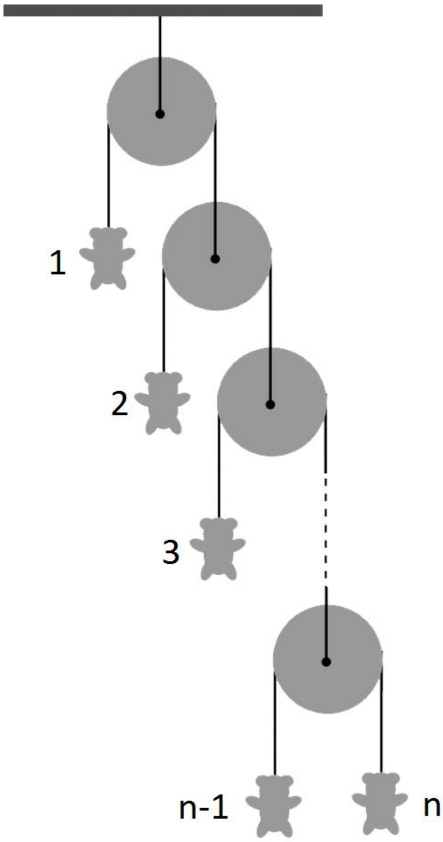
Por tanto, si la polea tiene masa despreciable T_1 valdrá el doble que T_2, como antes habíamos dicho.

Aviso final sobre este asunto. ¡Mucho ojo! No vale intentar calcular a las bravas $a_{polea\ 2}$ quitándose de en medio T_1 y T_2 en ⑥*(ya que T_1-$2T_2$=0), porque eso da lugar a una indeterminación, al tener un cero en el numerador y otro en el denominador.

CASO 3: N MASAS (N-1 POLEAS)

Vistos los dos casos anteriores, calcular el caso con N koalindres consiste simplemente en repetir los pasos anteriores, de manera ordenada y con cuidado.

2ª Ley de Newton (N ecuaciones)



$$a_1 = \frac{T_1 - mg}{m}$$

$$a_2 = \frac{T_2 - mg}{m}$$

$$a_3 = \frac{T_3 - mg}{m}$$

.
.
.

$$a_i = \frac{T_i - mg}{m}$$

.
.
.

$$a_{n-1} = \frac{T_{n-1} - mg}{m}$$

$$a_n = \frac{T_{n-1} - mg}{m}$$

Ojo, que las dos últimas masas comparten polea, y por tanto la tensión en ambas es T_{n-1}.

Igualdad de aceleraciones (N-1 ecuaciones)

Para escribir correctamente estas ecuaciones hay que tener en cuenta qué cuelga de qué y quién comparte cuerda con quién

$$a_1 = -a_{polea\ 2}$$

En la ecuación de a_2, el rol de a_3 ahora lo toma $a_{polea\ 3}$ (el koalindre 2 comparte cuerda con la polea 3, mientras que cuelga de la polea 2) y así sucesivamente.

$$a_2 - a_{polea\ 2} = -a_{polea\ 3} + a_{polea\ 2}$$
$$a_3 - a_{polea\ 3} = -a_{polea\ 4} + a_{polea\ 3}$$

.
.
.

$$a_i - a_{polea\ i} = -a_{polea\ i+1} + a_{polea\ i}$$

.
.
.

$$a_{n-1} - a_{polea\ n-1} = -a_{polea\ n} + a_{polea\ n-1}$$

Relación de tensiones (N-2 ecuaciones)

Si la explicación de antes nos ha convencido, podremos escribir sin miedo:

$$T_1 = 2T_2$$
$$T_2 = 2T_3$$

.
.
.

$$T_i = 2T_{i+1}$$

.
.
.

$$T_{n-2} = 2T_{n-1}$$

Solución del sistema

Analíticamente, hasta aquí es donde he llegado. Lo siguiente que he hecho es resolver el sistema mediante un programa informático para un número cada vez mayor de koalindres y observar el patrón de las soluciones. En la siguiente tabla se puede ver la expresión de a_1 en función del número de koalindres:

N	a_1/g (expresión)	a_1/g (fracción)	a_1/g (número)
2	$\frac{2^1}{2} - 1$	0	0
3	$\frac{2^3}{2+2^2} - 1$	$\frac{1}{3}$	0.333
4	$\frac{2^5}{2+2^2+2^4} - 1$	$\frac{5}{11}$	0.455
5	$\frac{2^7}{2+2^2+2^4+2^6} - 1$	$\frac{21}{43}$	0.488
6	$\frac{2^9}{2+2^2+2^4+2^6+2^8} - 1$	$\frac{85}{171}$	0.497
...	...	...	...
N	$\frac{2^{2N-3}}{2+\sum_{i=1}^{i=N-2} 2^{2i}} - 1$		

Por tanto, en el problema planteado de infinitos koalindres, el primero de ellos experimenta una aceleración hacia arriba de valor g/2.